مذكرة

الهندسة

متوسطات المثلث - التباين

الفصل الدراسى الأول ٢٠٢٠

متوسطات المثلث

- متوسطات المثلث
- المثلث المتساوى الساقين
- نظريات المثلث المتساوى الساقين
- نتائج نظريات المثلث المتساوى الساقين

متباينة المثلث

- مفهوم التباين
- المقارنة بين قياسات الزوايا فى المثلث
- المقارنة بين أطوال الأضلاع فى المثلث
- متباينة المثلث

متوسطات المثلث

تعـــريف

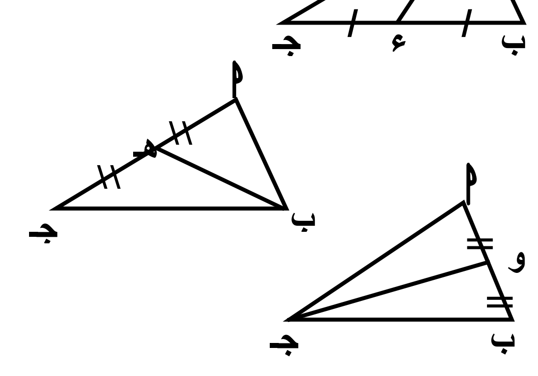
متوسط المثلث هو القطعة المستقيمة الواصلة بين أى رأس من رؤوس المثلث الى منتصف الضلع المقابل لهذه الرأس



- إذا كان ء منتصف ب جـ فإن ا ء يسمى متوسط



- إذا كان هـ منتصف ا جـ فإن ب هـ يسمى متوسط



- إذا كان و منتصف ا ب فإن جـ و (متوسط)

نظرية (١)

متوسطات المثلث تتقاطع جميعا فى نقطة واحدة

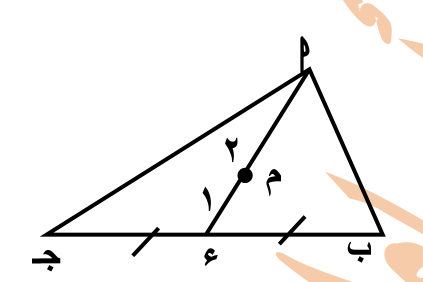
ا ء ∩ ب هـ ∩ جـ و = { م }

نظرية (٢)

نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلا منها بنسبة ٢ : ١ من جهة الرأس



أى أن: إذا كان ا ء متوسط فى Δ ا ب جـ



ا م : م ء = ٢ : ١

ا م = ٢ م ء = $\frac{٢}{٣}$ ا ء

ا ء = $\frac{٣}{٢}$ ا م = ٣ م ء

لاحظ أن :

إذا كان ا ء متوسط طوله ٦سم ، م نقطة تلاقى متوسطات المثلث فإن ا م = ٤ سم ، م ء = ٢سم

لاحظ أن:

نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلا منها بنسبة ٢ : ١ من جهة الرأس

حقيقة :-

النقطة التى تقسم متوسط المثلث بنسبة ١ : ٢ من جهة القاعدة هى نقطة تقاطع متوسطات المثلث

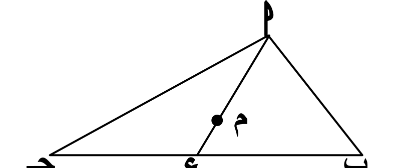
مثـــال : من الشكل المقابل إذا كانت م نقطة تقاطع متوسطات المثلث فأكمل

(١) أم : م ء = ٢ : ١

(٢) أء : أم = ٣ : ٢

(٣) إذا كان: أء = ٩ سم فإن أم = ٩ × $\frac{٢}{٣}$ = ٦سم

(٤) م ء : أ ء = ١ : ٣



مثـــال : إذا كان ء ، هـ منتصفا $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{أ ب}}$ ∩ $\overline{\text{أ جـ}}$ = { م } فأكمل

(١) إذا كان ء جـ = ١٢ سم فإن ء م = $\frac{١}{٣}$ × ١٢ = ٤ سم

(٢) إذا كان ء م = ٥ فإن م جـ = ٢ × ٥ = ١٠ سم



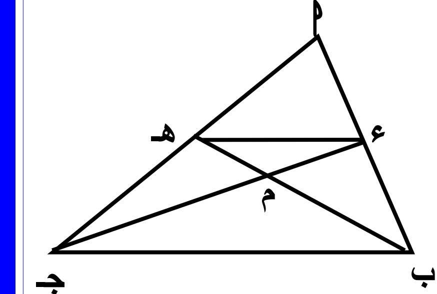
(٣) إذا كان م جـ = ١٢ سم فإن ء جـ = $\frac{٣}{٢}$ × ١٢ = ١٨ سم

(٤) إذا كان ب م = ٤ سم فإن م هـ = ٢ سم ، ب هـ = ٦ سم

(٥) إذا كان ء هـ = ١٠ سم فإن ب جـ = ١٠ ×٢ = ٢٠ سم

(٦) إذا كان ب جـ = ٨سم فإن ء هـ = ٨ ÷ ٢ = ٤ سم

(٧) ء هـ : ب جـ = ١ : ٢



مثـــال : فى الشكل المقابل ء، هـ منتصفا $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أجـ}}$ ، ب م =٦سم، ب جـ = ١٠سم
ء جـ = ١٢ سم . إوجد محيط ∆ ء م هـ

الحــــل

ء منتصف $\overline{\text{أب}}$ ∴ $\overline{\text{جـ ء}}$ متوسط

∴ م ء = $\frac{١}{٣}$ جـ ء = $\frac{١}{٣}$ ×١٢ = ٤سم

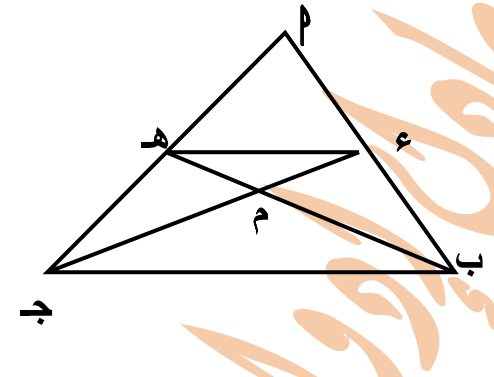
هـ منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$ ∴ $\overline{\text{ب هـ}}$ متوسط

∴ م هـ = $\frac{١}{٢}$ ب م = $\frac{١}{٢}$ ×٦ = ٣سم

ء منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، ∴ هـ منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$

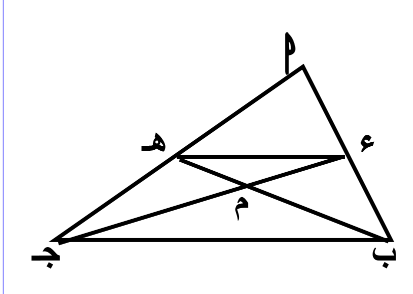
∴ ء هـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٠ = ٥سم

محيط ∆ء م هـ = ء م + م هـ + ء هـ = ٤ + ٣ + ٥ = ١٢سم



مثـــال : فى الشكل المقابل إذا كان ء ، هـ منتصفا $\overline{ﺃب}$ ، $\overline{ﺃجـ}$
محيط Δ ء م هـ = ٢٠ سم أوجد محيط Δ م ب جـ

الحـــــل



ء منتصف $\overline{ﺃب}$ ∴ $\overline{جـء}$ متوسط ∴ م جـ = ٢ م ء

هـ منتصف $\overline{ﺃجـ}$ ∴ $\overline{بهـ}$ متوسط ∴ م ب = ٢ م هـ

ء، هـ منتصفى $\overline{ﺃب}$ ، $\overline{ﺃجـ}$ ∴ ب جـ = ٢ ء هـ

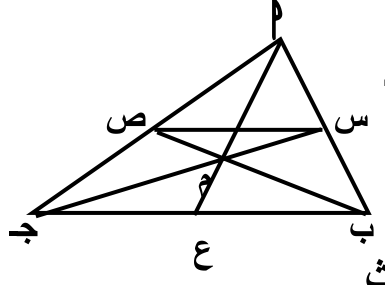
محيط م ب جـ = م جـ + م ب + ب جـ

= ٢ م ء + ٢ م هـ + ٢ ء هـ = ٢ (م ء + م هـ + ء هـ)

= ٢ محيط Δ ء م هـ = ٢ × ٢٠ سم = ٤٠ سم

مثـــال : أ ب جـ مثلث فيه س منتصف $\overline{ﺃب}$ ، ص ∋ $\overline{ﺃجـ}$ ، $\overline{س ص}$ // $\overline{ب جـ}$
$\overleftarrow{جـ س}$ ∩ $\overleftarrow{ب ص}$ = {م} فإذا كان $\overleftarrow{ﺃم}$ ∩ $\overleftarrow{ب جـ}$ = { ع } إثبت أن: ع منتصف $\overline{ب جـ}$

الحـــــل



س منتصف $\overline{ﺃب}$ ، $\overline{س ص}$ // $\overline{ب جـ}$ ∴ ص منتصف $\overline{ﺃجـ}$

س منتصف $\overline{ﺃب}$ ∴ $\overleftarrow{جـ س}$ متوسط

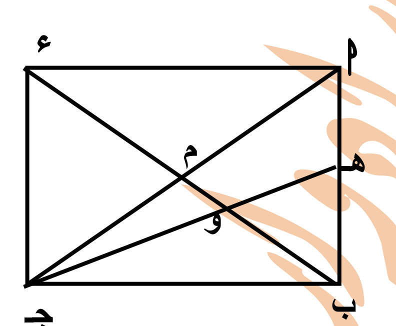
ص منتصف $\overline{ﺃجـ}$ ∴ $\overleftarrow{ب ص}$ متوسط

$\overleftarrow{ب ص}$ ∩ $\overleftarrow{جـ س}$ = { م } ∴ م نقطة تلاقى متوسطات المثلث

∴ $\overleftarrow{ﺃع}$ متوسط للمثلث ∴ ع منتصف $\overline{ب جـ}$

مثـــال : ﺃب جـ ء مستطيل تقاطع قطراه فى م ، هـ منتصف $\overline{ﺃب}$ ، $\overleftarrow{جـ هـ}$ ∩ $\overline{ب ء}$ = { و }
(١) إثبت أن و نقطة تقاطع متوسطات Δ ﺃ ب جـ
(٢) إذاكان: ب و = ٤ سم أوجد طول ﺃ م

الحـــــل



هـ منتصف $\overline{ﺃب}$ ∴ جـ هـ متوسط فى Δ ﺃ ب جـ

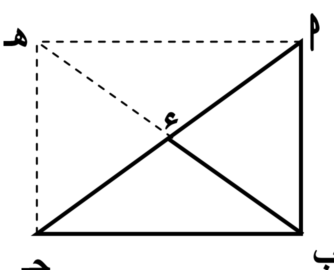
م منتصف $\overline{ﺃجـ}$ (القطران ينصف كلا منهما الاخر)

∴ $\overleftarrow{ب م}$ متوسط فى Δ أ ب جـ

$\overleftarrow{جـ هـ}$ ∩ $\overleftarrow{ب م}$ = { و } ∴ و نقطة تقاطع متوسطات Δ ﺃب جـ

ب و = ٤ سم = ∴ و م = ٢سم ∴ ب م = ٦سم ∴ ﺃ م = ب م = ٦ سم

نظرية (٣) طول متوسط المثلث القائم الزاوية الخارج من رأس القائمة يساوى نصف طول وتر هذا المثلث



المعطيات أ ب جـ مثلث فيه ق(∠ أ ب جـ) = ٩٠°

ب ء متوسط فى المثلث أ ب جـ

المطلوب إثبات أن ب ء = $\frac{1}{2}$ أ جـ

العمل نرسم ب ء ونأخذ هـ ∈ ب ء بحيث: ب ء = ء هـ

البرهان الشكل أ ب جـ هـ فيه أ جـ ، ب هـ ينصف كلا منهما الاخر

∴ الشكل أ ب جـ هـ متوازى أضلاع

ق (∠ أب جـ) = ٩٠ ∴ الشكل أب جـ هـ مستطيل

∴ ب هـ = أ جـ ⟸ ب ء = $\frac{1}{2}$ ب هـ ∴ ب ء = $\frac{1}{2}$ أجـ

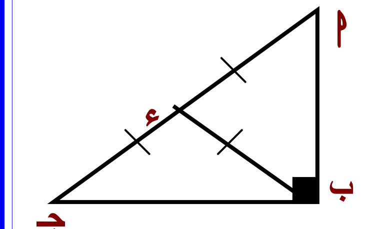
فمثلا فى الشكل المقابل

إذا كان ء منتصف أ جـ ، أ جـ = ١٠ سم فإن ب ء = ٥ سم

والعكس صحيح



إذا كان ء منتصف أجـ وكان ب ء = ٣سم فإن أجـ = ٦سم



لاحظ أن ب ء = أء = ء جـ وبالتالى فإن

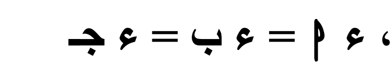
(١) المثلث أ ب ء يكون مثلث متساوى الساقين

(٢) المثلث ب ء جـ يكون مثلث متساوى الساقين

عكس نظرية (٣) إذا كان طول متوسط المثلث المرسوم من أحد رؤوسه يساوى نصف طول الضلع المقابل فإن زاوية هذا الرأس تكون قائمة



المعطيات أ ب جـ مثلث ، ب ء متوسط



، ء أ = ء ب = ء جـ



المطلوب: إثبات أن ق(∠ أ ب جـ) = ٩٠°

العمل : نرسم ب ء ونأخذ هـ ∈ ب ء بحيث ب ء = ء هـ

البرهان : ب ء = $\frac{1}{2}$ ب هـ = $\frac{1}{2}$ أ جـ

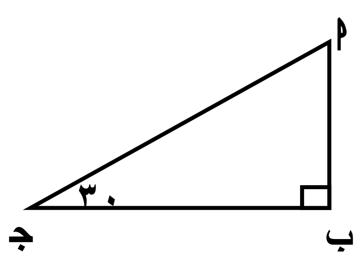
∴ ب هـ = أ جـ

الشكل أ ب جـ هـ فيه أ جـ ، ب هـ

متساويان فى الطول وينصف كلا منهما الاخر ∴ الشكل أ ب جـ هـ مستطيل

∴ ق(∠ أ ب جـ) = ٩٠° وهو المطلوب إثباته

نتيجة : طول الضلع المقابل للزاوية قياسها ٣٠° فى المثلث القائم الزاوية يساوى نصف طول الوتر



Δ أ ب جـ قائم الزاوية فى ب ، ق(∠جـ) = ٣٠°

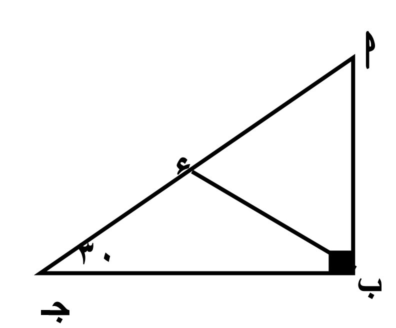
∴ أ ب = $\frac{1}{2}$ أ جـ

إذا كان: أ جـ = ١٠سم فإن أ ب = ٥سم

إذا كان : أ ب = ٦سم ، فإن أ جـ = ١٢سم

مثـــال : فى الشكل المقابل Δ أ ب جـ قائم الزاوية فى ب ، ق(∠جـ) = ٣٠°

، ء منتصف $\overline{أجـ}$ أوجد محيط Δ أ ب ء



الحــــــل

ء منتصف $\overline{أجـ}$ ، ق(∠أ ب جـ) = ٩٠°

∴ $\overline{ب ء}$ المتوسط = $\frac{1}{2}$ أ جـ = $\frac{10}{2}$ = ٥سم

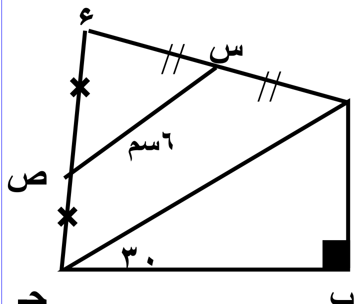
Δ أب جـ قائم الزاوية فى ب ، ق(∠جـ) = ٣٠°

∴ أ ب = $\frac{1}{2}$ أ جـ = $\frac{10}{2}$ = ٥سم

محيط Δ أ ب ء = أ ب + ب ء + ء أ = ٥ + ٥ +٥ = ١٥سم

مثـــال : Δ أب جـ قائم الزاوية فى ب ، ق(∠ أ جـ ب) = ٣٠° ، س ص = ٦سم

س منتصف $\overline{أء}$ ، ص منتصف $\overline{ء جـ}$ أوجد طول $\overline{أب}$



الحــــــل

Δ ء أ جـ فيه : س ، ص منتصفى $\overline{أ ء}$ ، $\overline{ء جـ}$

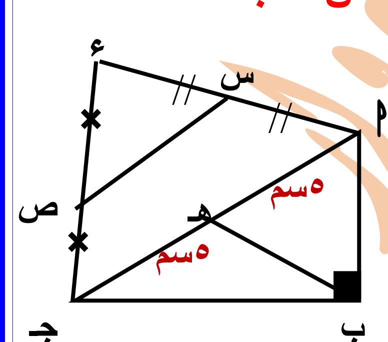
∴ س ص = $\frac{1}{2}$ أ جـ ∴ أ جـ = ١٢ سم

فى Δ أ ب جـ قائم الزاوية فى ب ، ق(∠ أ جـ ب) = ٣٠°

∴ أ ب = $\frac{1}{2}$ أ جـ = ١٢ ÷ ٢ = ٦ سم

مثـــال : Δ أب جـ قائم الزاوية فى ب ، هـ أ = هـ جـ = ٥ سم

س منتصف $\overline{أء}$ ، ص منتصف $\overline{ء جـ}$ أوجد طول $\overline{س ص}$ ، $\overline{ب هـ}$



الحــــــل

Δ ء أ جـ فيه : س ، ص منتصفى $\overline{أ ء}$ ، $\overline{ء جـ}$

∴ س ص = $\frac{1}{2}$ أ جـ ∴ س ص = ١٠ ÷ ٢ = ٥ سم

فى Δ أ ب جـ قائم الزاوية فى ب ، $\overline{ب هـ}$ متوسط

∴ ب هـ = $\frac{1}{2}$ أ جـ = ١٠ ÷ ٢ = ٥ سم

تمارين

(١) فى الشكل المقابل

أ ب جـ مثلث فيه ق (∠ أ ب جـ) = ٩٠°

ق (∠ جـ) = ٣٠° ، ب ء ⊥ أ جـ

فإذا كان أ ء = ٣ سم أحسب طول أ ب ، ء جـ

(٢) فى الشكل المقابل

س منتصف $\overline{\text{أ ء}}$ ، ص منتصف $\overline{\text{ء جـ}}$



إثبت أن : أ ب = س ص



(٣) فى الشكل المقابل

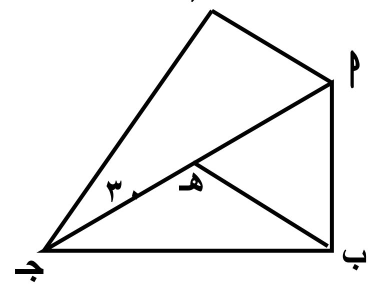
إثبت أن ب ء = $\frac{1}{4}$ أ جـ



(٤) فى الشكل المقابل



ق (∠ أ ب جـ) = ق (∠ أ ء جـ) = ٩٠°



ق (∠ أ جـ ء) = ٣٠° ، هـ منتصف أ جـ

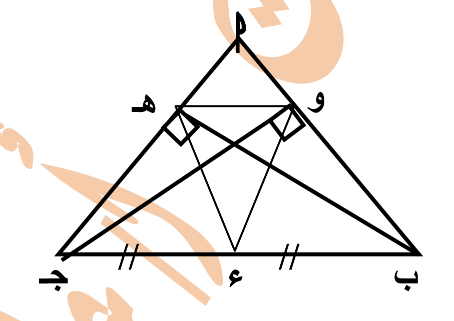
إثبت أن أ ء = ء هـ



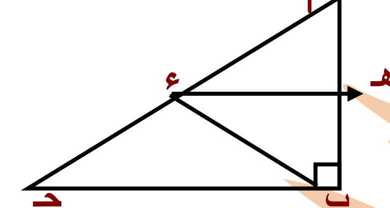
(٦) فى الشكل المقابل

إثبت أن

Δ ء و هـ متساوى الساقين



(٧) Δ أ ب جـ فيه ق (∠ أ ب جـ) = ٩٠°

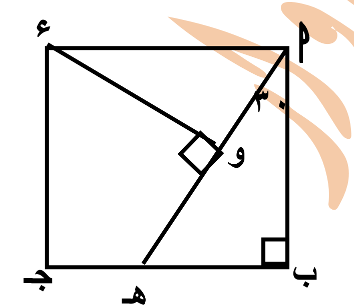


، ء منتصف أ جـ ، ء هـ // ب جـ ويقطع أ ب فى هـ إثبت أن

(١) محيط Δ هـ ب ء = $\frac{1}{2}$ محيط Δ أ ب جـ

(٢) Δ أ ء ب متساوى الساقين

(٨) فى الشكل المقابل



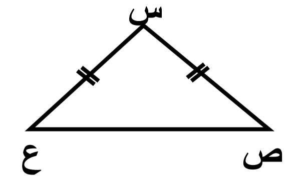
أ ب جـ ء مربع ، هـ ∈ ب جـ

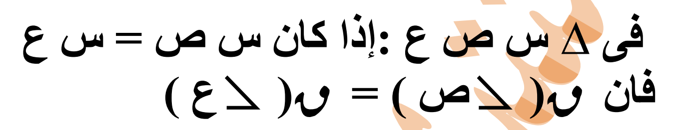
ق (∠ ب أ هـ) = ٣٠° ، ء و ⊥ أ هـ

فإذا كان أو = ٤ سم أحسب مساحة المربع

المثلث المتساوى الساقين

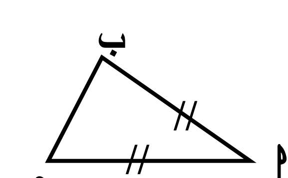
نظرية (١) زاويتا القاعدة فى المثلث المتساوى الساقين متطابقتان





فى Δ س ص ع :إذا كان س ص = س ع

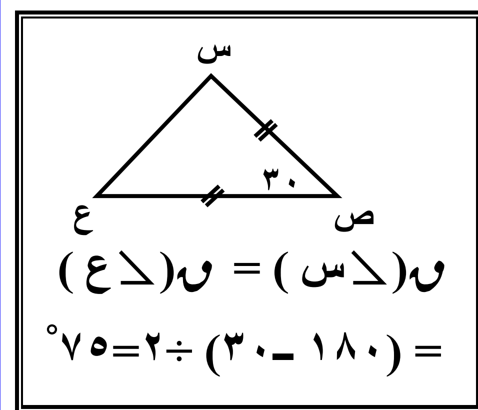
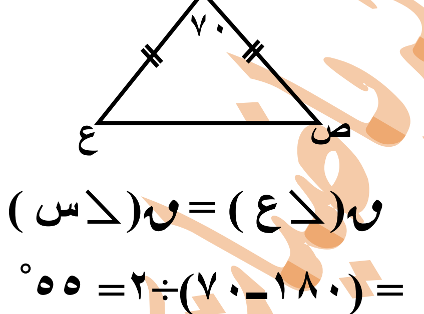
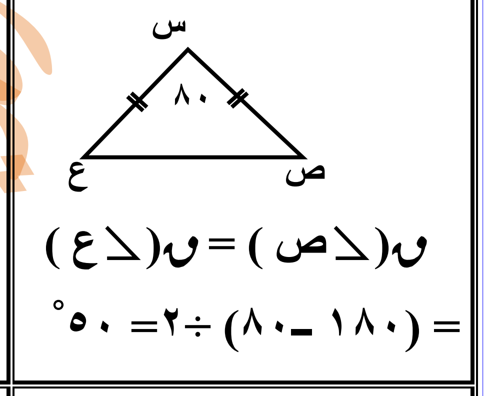
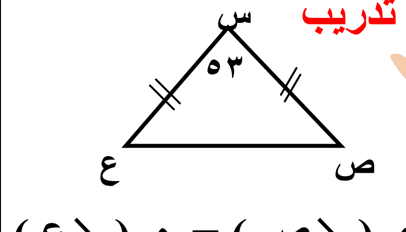
فان ق(∠ص) = ق(∠ع)



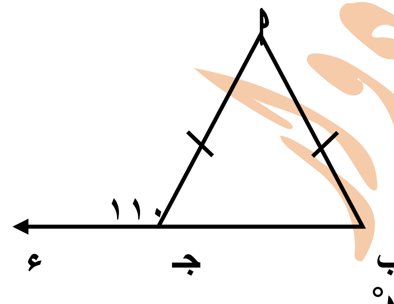
فى Δ أ ب جـ :إذا كان أ ب = أ جـ

فان ق(∠جـ) = ق(∠ب)

س فى كل شكل من الاشكال الاتية أكمل حسب المطلوب

 ق(∠س) = ق(∠ع) = (١٨٠ ـ ٣٠) ÷٢ =٧٥°	 ق(∠ع) = ق(∠س) = (١٨٠ـ٧٠)÷٢= ٥٥°	 ق(∠ص) = ق(∠ع) = (١٨٠ ـ ٨٠) ÷٢= ٥٠°
تدريب  ق(∠ص) = ق(∠ع) = ... = ...	تدريب ق(∠ء) = ق(∠هـ) = ... = ...	تدريب ق(∠أ) = ق(∠ب) = ... = ...

مثـــال : إذا كانت ء ∈ $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ ، أب = أ جـ أوجد قياسات زوايا المثلث أ ب جـ



الحـــل

ق(∠ أجـ ب) + ق(∠ أجـ ء) = ١٨٠

[زاويتان متجاورتان حادثتان من تقاطع شعاع ومستقيم]

∴ ق(∠ أجـ ب) = ١٨٠ ـ ١١٠ = ٧٠°

أ ب = أ جـ ∴ ق(∠ب) = ق(∠ أجـ ب) = ٧٠°

مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∴ ق(∠ أ) = ١٨٠° – [٧٠ + ٧٠] = ١٨٠° – ١٤٠° = ٤٠°

مثـــال فى الشكل: ص س ⟵ // ع و ⟵ ، س ص = س ع أوجد قياسات زوايا Δ س ص ع

الحـــــل

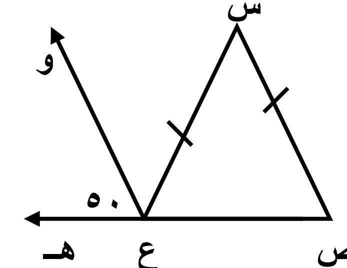
ص س ⟵ // ع و ⟵ ، ص هـ ⟵ قاطع لهما

∴ ق(∠ ص) = ق(∠ و ع هـ) = ٥٠° [متناظرتان]

س ص = س ع ∴ ق(∠ ص) = ق(∠ س ع ص) = ٥٠°

مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∴ ق(∠ س) = ١٨٠° – [٥٠° + ٥٠°] = ١٨٠° – ١٠٠° = ٨٠°



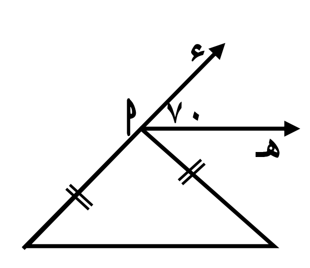
مثـــال فى الشكل: أ ب = أ جـ ، أ هـ ⟵ // جـ ب ⟵ أوجد قياسات زوايا Δ أ ب جـ

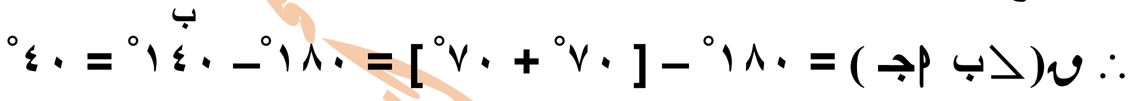
الحـــــل

أ هـ ⟵ // جـ ب ⟵ ∴ ق(∠ ء أ هـ) = ق(∠ جـ) = ٧٠°

أ ب = أ جـ ∴ ق(∠ ب) = ق(∠ جـ) = ٧٠°

مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة =١٨٠°




∴ ق(∠ ب أ جـ) = ١٨٠° – [٧٠° + ٧٠°] = ١٨٠° – ١٤٠° = ٤٠°

مثـــال فى الشكل : ب ء = ء أ = أ جـ ، ق(∠ ب أ ء) = ٣٠° أوجد ق(∠ ء أ جـ)

الحـــــل

فى Δ أ ب ء ب ء = أ ء

∴ ق(∠ ب) = ق(∠ ب أ ء) = ٣٠°

مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∴ ق(∠ أ ء ب) = ١٨٠° – [٣٠° + ٣٠°] = ١٨٠° – ٦٠° = ١٢٠°

ق(∠ أ ء ب) + ق(∠ أ ء جـ) = ١٨٠°

[متجاورتان حادثتان من تقاطع مستقيم وشعاع بدايته تقع على المستقيم]

∴ ق(∠ أ ء جـ) = ١٨٠° ـ ١٢٠° = ٨٠°

فى △ أ ء جـ   أ ء = أ جـ   ∴ ق(∠ أ ء جـ) = ∴ ق(∠ أ جـ ء) = ٨٠°

مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠

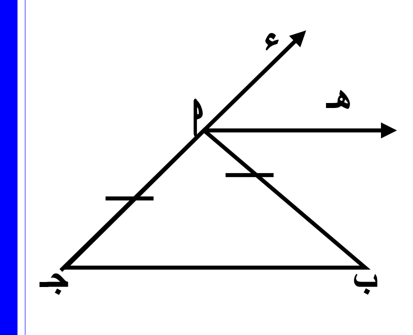
∴ ق(∠ ء أ جـ) = ١٨٠° ـ [٨٠° + ٨٠°] = ١٨٠° ـ ١٦٠° = ٢٠°

مثـــال فى الشكل : أ ب = أ جـ ، $\overleftarrow{\text{أ هـ}}$ // $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ إثبت أن $\overleftarrow{\text{أ هـ}}$ ينصف ∠ ء أ ب

الحــــــل

أ ب = أ جـ   ∴ ق(∠ب) = ق(∠جـ)   (١)

$\overleftarrow{\text{أ هـ}}$ // $\overleftarrow{\text{جـ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـ ء}}$ قاطع لهما



∴ ق(∠ ء أ هـ) = ق(∠جـ)   [متناظرتان] (٢)

∴ ق(∠هـ أ ب) = ق(∠ب)   [متبادلتان] (٣)

من ١ ، ٢ ، ٣ ينتج أن ق(∠ ء أ هـ) = ق(∠ هـ أ ب)

∴ $\overleftarrow{\text{أ هـ}}$ ينصف (∠ ء أ ب)

مثـــال :فى الشكل : ب ء = ب جـ إوجد: ق(∠ب جـ ء) ، ق(∠ ء ب جـ)

الحــــــل

ق(∠ب ء جـ) = ق(∠ أ) + ق(∠ أ ب ء)

لانها خارجة عن △ أ ب ء

∴ ق(∠ب ء جـ) = ٣٠° + ٤٠° = ٧٠°

ب ء = ب جـ   ∴ ق(∠ب ء جـ) = ق(∠جـ) = ٧٠°

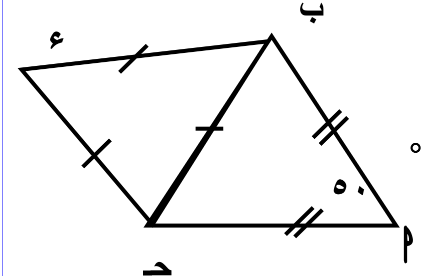
مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∴ ق(∠ ء ب جـ) = ١٨٠° ـ [٧٠° + ٧٠°] = ٤٠°

ملاحظة: قياس أى زاوية خارجة للمثلث يساوى مجموع قياسى الزاويتين الداخلتين عدا المجاورة لها

نتيجة : إذا كان المثلث متساوى الأضلاع فإن زواياه الثلاثة تكون متطابقة قياسها ٦٠°

مثـــال فى الشكل : ق(∠ ٲ) = ٥٠° ، ٲ ب = ٲ جـ ، ∆ ء ب جـ متساوى الاضلاع
أوجد ق(∠ ٲب ء)



الحـــــــــل

فى ∆ ٲ ب جـ فيه ٲ ب = ٲ جـ

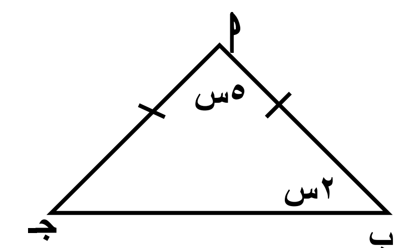
∴ ق(∠ ٲب جـ) = ق(∠ ٲجـ ب) = $\frac{١٨٠-٥٠}{٢}$ = ٦٥°

فى ∆ ب جـ ء فيه ب ء = ء جـ = ب جـ

∴ ق(∠جـ ب ء) = ق(∠ب ء جـ) = ق(∠ء ب جـ) = ٦٠°

∴ ق(∠ ٲب ء) = ٦٠° + ٦٥° = ١٢٥°

مثـــال : فى الشكل: ٲب = ٲجـ ، ق(∠ ٲ) = ٥س° ، ق(∠ب) = ٢س°
أحسب قياسات زوايا ∆ ٲب جـ



الحـــــــــل

ٲب = ٲجـ ∴ ق(∠ب) = ق(∠جـ) = ٢س°

مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

ق(∠ ٲ) + ق(∠ب) + ق(∠جـ) = ١٨٠°

٥ س + ٢س + ٢ س = ١٨٠° ⟸ ٩ س = ١٨٠° ∴ س = ٢٠°

ق(∠ ٲ) = ٥س = ٥ × ٢٠° = ١٠٠°

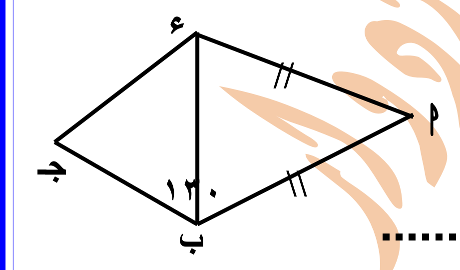
ق(∠ب) = ٢ س = ٢ × ٢٠° = ٤٠°

ق(∠جـ) = ٢س = ٢ × ٢٠° = ٤٠°

تمــــــارين

(١) فى الشكل : ٲء = ٲب ، ∆ ب ء جـ متساوى الاضلاع ،



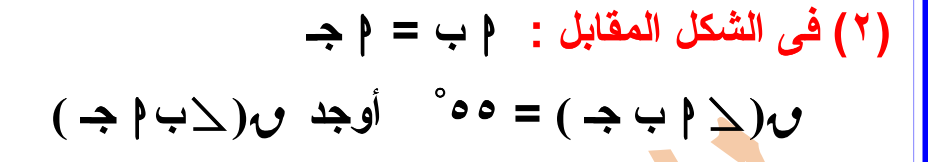


ق(∠ ٲب جـ) = ١٣٠° أكمل

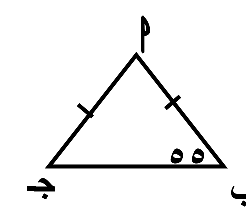
(١) ق(∠ء ب جـ) = ...

(٢) ق(∠ ٲب ء) = ... (٤) ق(∠ب ء جـ) = ...

(٣) ق(∠ ٲء ب) = ... (٥) ق(∠ب ٲ ء) = ...

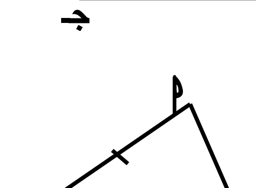

(٢) فى الشكل المقابل : أ ب = أ جـ

ق(∠ أ ب جـ) = ٥٥° أوجد ق(∠ب أ جـ)



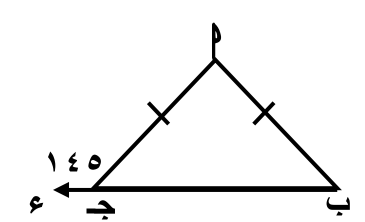
(٣) فى الشكل المقابل أ ب = أ جـ

ق(∠ أ جـ ب) = ٤٢° أوجد ق(∠ أ ب جـ)



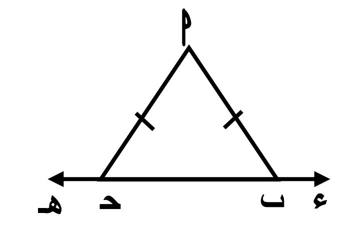
(٤) فى الشكل المقابل أ ب = أ جـ

ق(∠ أ جـ ء) = ١٤٥° أوجد ق(∠ب أ جـ)



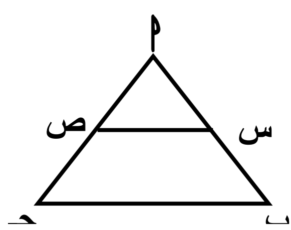
(٥) فى الشكل المقابل أ ب = أ جـ

إثبت أن ق(∠ أ ب ء) = ق(∠ أ جـ هـ)



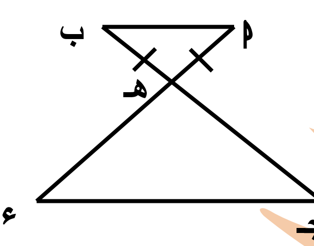
(٦) فى الشكل المقابل أب = أجـ ، س ص // ب جـ

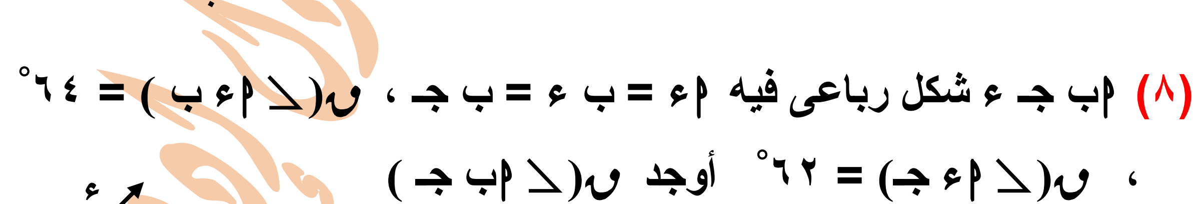
إثبت أن ق(∠ أس ص) = ق(∠ أ ص س)



(٧) فى الشكل المقابل أهـ = هـ ب

أ ب // جـ ء إثبت أن ق(∠جـ) = ق(∠ء)

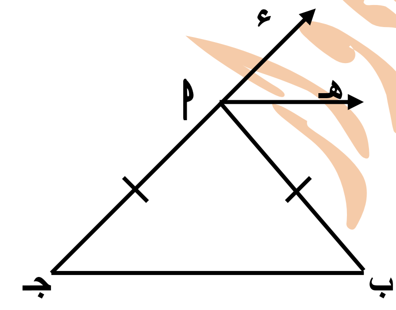



(٨) أب جـ ء شكل رباعى فيه أء = ب ء = ب جـ ، ق(∠ أ ء ب) = ٦٤°

، ق(∠ أ ء جـ) = ٦٢° أوجد ق(∠ أب جـ)

(٩) فى الشكل المقابل أ ب = أ جـ

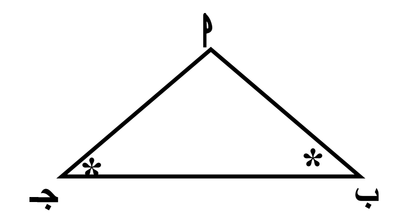
أهـ // ب جـ إثبت أن أهـ ينصف ∠ ء أهـ



نظرية (٢)

إذا تطابقت زاويتان فى مثلث فان الضلعين المقابلين لهاتين الزاويتان يتطابقان ويكون المثلث متساوى الساقين

فمثلا فى الشكل المقابل

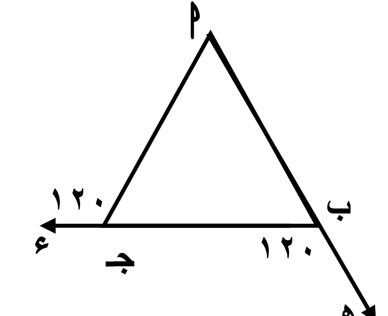


إذا كان ق(∠ب) = ق(∠جـ)

فان أب = أجـ

نتيجة : إذا تطابقت زوايا مثلث فإنه يكون متساوى الاضلاع

مثـــال : فى الشكل المقابل إثبت أن Δ أب جـ متساوى الاضلاع



الحـــل

ق(∠ أب جـ) + ق(∠هـ ب جـ) = ١٨٠°

ق(∠ أب جـ) = ١٨٠° ــ ١٢٠° = ٦٠°

ق(∠ أجـ ب) = ١٨٠° ــ ١٢٠° = ٦٠°

مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

ق(∠ أ) = ١٨٠° ــ [٦٠ + ٦٠] = ١٨٠° ــ ١٢٠° = ٦٠°

ق(∠ أ) = ق(∠ أب جـ) = ق(∠ أجـ ب) ∴ Δ أب جـ متساوى الاضلاع

مثـــال : فى الشكل المقابل إثبت أن المثلث أ ب جـ متساوى الساقين

الحـــل

أ
ب
جـ
ء
٨٠
١٣٠

ق(∠ أجـ ب) + ق(∠ أجـ ء) = ١٨٠°



[متجاورتان حادثتان من تقاطع شعاع ومستقيم]

∴ ق(∠ أجـ ب) = ١٨٠° ــ ١٣٠ = ٥٠°

مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

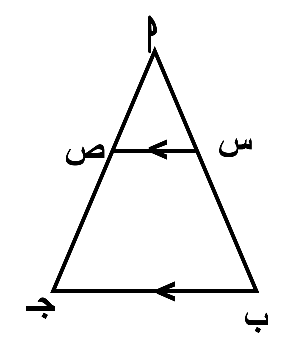
∴ ق(∠ أ) = ١٨٠° ــ [٨٠ + ٥٠] = ١٨٠° ــ ١٣٠° = ٥٠°

ق(∠ أ) = ق(∠ أجـ ب) = ٥٠°

∴ أ ب = ب جـ   [المثلث متساوى الساقين]

مثـــال فى الشكل: أب = أجـ ، س ص // ب جـ أثبت أن ∆ أس ص متساوى الساقين

الحـــل



فى ∆ أ ب جـ   أب = أجـ

∴ ق(∠ب) = ق(∠جـ) ------ (١)

س ص // ب جـ

∴ ق(∠ أس ص) = ق(∠ب)   [بالتناظر] ------ (٢)

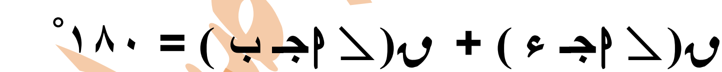
∴ ق(∠ أ ص س) = ق(∠جـ)   [بالتناظر] ------ (٣)

من ١ ، ٢ ، ٣ ينتج أن

∴ ق(∠ أس ص) = ق(∠ أ ص س)   ∴ ∆ أس ص متساوى الساقين

مثـــال : فى الشكل المقابل: إثبت ان ∆ أ ب جـ متساوى الاضلاع

الحـــل



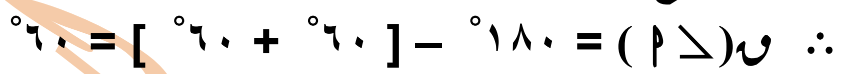
ق(∠ أجـ ء) + ق(∠ أجـ ب) = ١٨٠°

∴ ق(∠ أجـ ب) = ١٨٠° – ١٢٠° = ٦٠°

فى ∆ أب جـ   ∴ أب = أجـ

∴ ق(∠ أب جـ) = ق(∠ أجـ ب) = ٦٠°

مجموع زوايا المثلث = ١٨٠°



∴ ق(∠ أ) = ١٨٠° – [٦٠° + ٦٠°] = ٦٠°

ق(∠ أ) = ق(∠ أب جـ) = ق(∠ أ جـ ب)   ∴ ∆ أب جـ متساوى الاضلاع

أ
١٢٠
ء جـ ب



مثـــال : فى الشكل: أب = أجـ ، ب ء ينصف ∠ أ ب جـ ، جـ ء ينصف ∠ أ جـ ء

إثبت أن ∆ ء ب جـ متساوى الساقين

الحـــل

أب = أجـ   ∴ ق(∠ب) = ق(∠جـ)

ب ء ينصف ∠ أب جـ   ∴ ق(∠ ء ب جـ) = $\frac{1}{2}$ ق(∠ب)

جـ ء ينصف ∠ أجـ ء   ∴ ق(∠ ء جـ ب) = $\frac{1}{2}$ ق(∠جـ)

من ١ ، ٢ ، ٣ ينتج أن

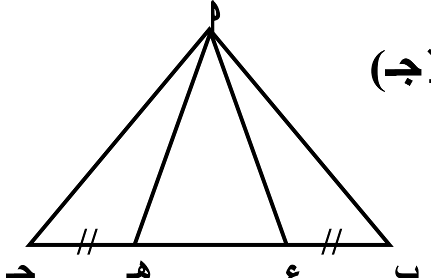
∴ ق(∠ ء ب جـ) = ق(∠ ء جـ ب)

أ
ء
جـ ب

∴ Δ ء ب جـ متساوى الساقين

مثـــال : فى الشكل : مب = مجـ ، ب ء = هـ جـ   إثبت أن Δ مء هـ متساوى الساقين

الحــــــل



Δ مب جـ فيه مب = مجـ ∴ ق(∠ب) = ق(∠جـ)

Δ مب ء ، Δ م هـ جـ

فيهما { مب = مجـ ، ب ء = هـ جـ
ق(∠ب) = ق(∠جـ) }

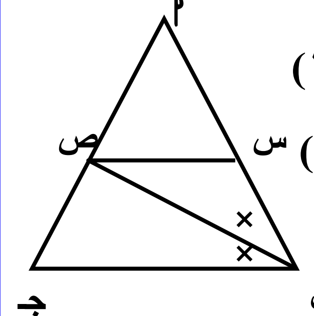
∴ Δ مب ء ≡ Δ م جـ هـ

ومن التطابق ينتج أن مء = مهـ   ∴ Δ مء هـ متساوى الساقين

مثـــال فى الشكل : س ص // ب جـ ، ب ص ينصف ∠ مب جـ

إثبت أن Δ س ب ص متساوى الساقين

الحــــــل



س ص // ب جـ ∴ ق(∠س ص ب) = ق(∠ص ب جـ) (١)

ب ص ينصف أب جـ ∴ ق(∠س ب ص) = ق(∠ص ب جـ) (٢)

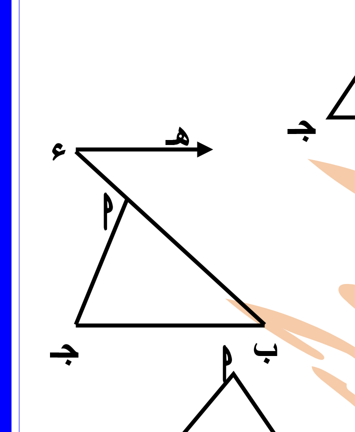
من ١ ، ٢ ينتج أن ∴ ق(∠س ص ب) = ق(∠س ب ص)

∴ Δ س ب ص متساوى الساقين

تمارين

(١) فى الشكل : ق(∠م) = ٤٠° ، ق(∠ب)= ٧٠°

إثبت أن Δ مب جـ متساوى الساقين

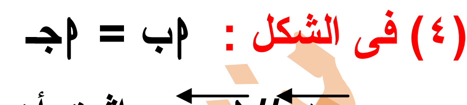


(٢) فى الشكل : ء هـ // ب جـ   ق(∠هـ ء م) = ١٢٠° ،

ق(∠ب)= ٦٠°   أثبت أن Δ مب جـ متساوى الاضلاع

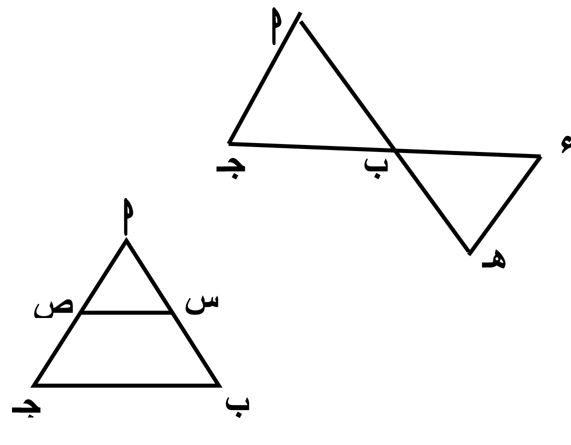
(٣) فى الشكل : ق(∠م جـ و) = ١١٥°

ق(∠ ء ب هـ) = ٦٥° إثبت أن △ أب جـ متساوى الساقين



(٤) فى الشكل : أب = أجـ

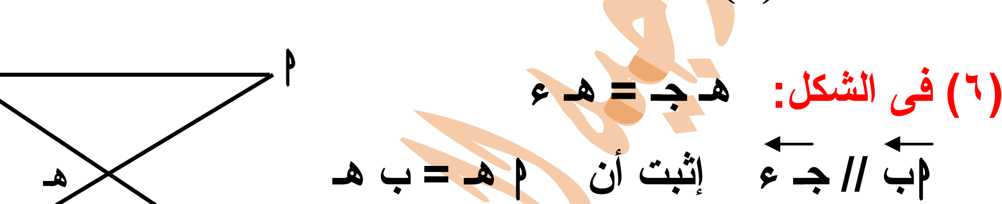
ء هـ // أجـ إثبت أن ء هـ = ب هـ



(٥) فى الشكل : أب = أجـ ، س ص // ب جـ

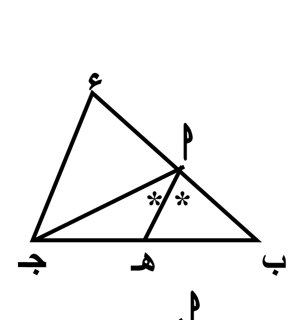
إثبت أن (١) △ أس ص متساوى الساقين

(٢) س ب = ص جـ



(٦) فى الشكل: هـ جـ = هـ ء

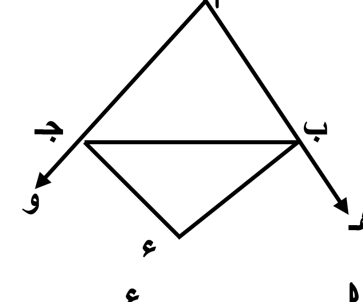
أب // جـ ء إثبت أن أ هـ = ب هـ

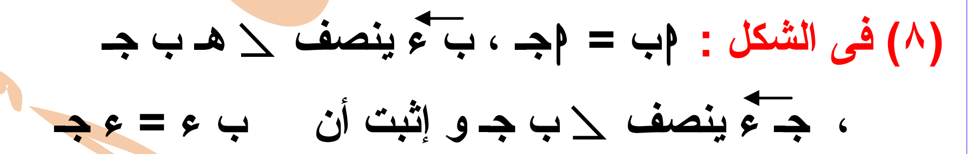




(٧) فى الشكل : أهـ ينصف ∠ ب أجـ ،

أهـ // ء جـ إثبت أن △ أء جـ متساوى الساقين





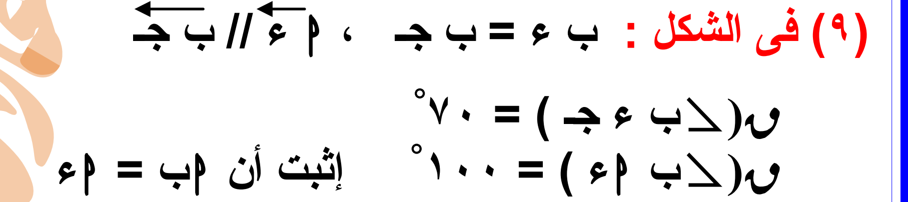
(٨) فى الشكل : أب = أجـ ، ب ء ينصف ∠ هـ ب جـ

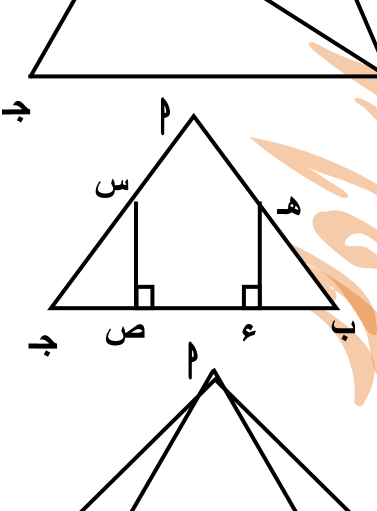
، جـ ء ينصف ∠ ب جـ و إثبت أن ب ء = ء جـ

(٩) فى الشكل : ب ء = ب جـ ، أ ء // ب جـ

ق(∠ب ء جـ) = ٧٠°

ق(∠ب أ ء) = ١٠٠° إثبت أن أب = أء





(١٠) فى الشكل: ء ب = س جـ ، ب هـ = ص جـ

ء هـ ⊥ ب جـ ، س ص ⊥ ب جـ إثبت أن أب = أجـ

(١١) فى الشكل: ق(∠ أ س ص) = ق(∠ أ ص س)،

ب س = جـ ص   إثبت أن: Δ أب جـ متساوى الساقين

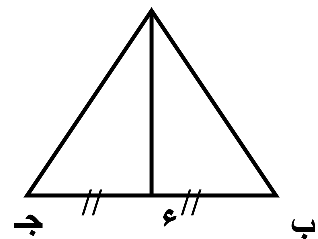
نتائج على نظريات المثلث المتساوى الساقين

نتيجة (١)

متوسط المثلث المتساوى الساقين المرسوم من زاوية الرأس ينصف زاوية الرأس ويكون عموديا على القاعدة



في الشكل المقابل إذا كان أء متوسط (ء منتصف ب جـ)



فان (١) أء ينصف ∠ ب أ جـ

(٢) أء ⊥ ب جـ

نتيجة (٢)

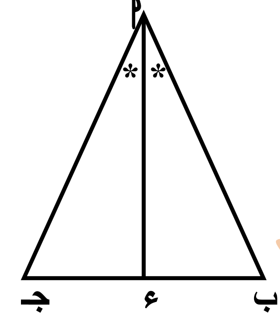
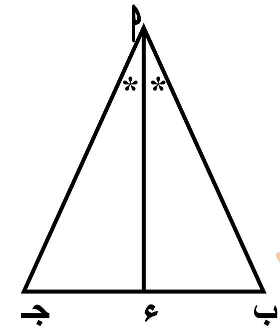
منصف زاوية الرأس فى المثلث المتساوى الساقين ينصف القاعدة ويكون عموديا عليها



في الشكل المقابل: إذا كان أء ينصف ∠ ب أجـ



فان (١) أء متوسط (ء منتصف ب جـ)

(٢) أء ⊥ ب جـ

نتيجة (٣)

المستقيم المرسوم من رأس المثلث المتساوى الساقين عموديا على القاعدة ينصف كلا من القاعدة وزاوية الرأس

في الشكل المقابل: إذا كان أء ⊥ ب جـ



فان (١) أء متوسط (ء منتصف ب جـ)

(٢) أء ينصف ∠ ب أ جـ

أ

ب ء جـ

محور التماثل للمثلث المتساوى الساقين

محور التماثل للمثلث المتساوى الساقين هو المستقيم المرسوم من رأسه عموديا

أ

على القاعدة

فى الشكل المقابل : إذا كان أء ⊥ ب جـ

فان أء يسمى محور تماثل للمثلث أ ب جـ

خاصية هامة : أى نقطة على محور تماثل القطعة المستقيمة تكون على بعدين متساويين من طرفيها

ملاحظة

(١) عدد محاور التماثل للمثلث المتساوى الساقين = محور واحد

(٢) عدد محاور التماثل للمثلث المتساوى الاضلاع = ثلاث محاور

(٣) عدد محاور التماثل للمثلث المختلف الاضلاع = ليس له محاور

تعريف محور القطعة المستقيمة

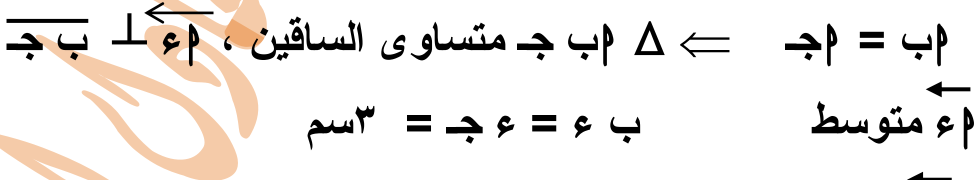
محور القطعة المستقيمة هو المستقيم العمودى عليها من منتصفها

إذا كان المستقيم ل ⊥ ب جـ

من منتصفها فان ل يسمى محور لـ ب جـ

مثـــال : فى الشكل: أب = أجـ ، ق(∠ب أ ء) = ٢٥° ، أء ⊥ ب جـ ، ب جـ = ٦سم أوجد : (١) طول ء جـ (٢) ق(∠أ جـ ب)

الحـــل

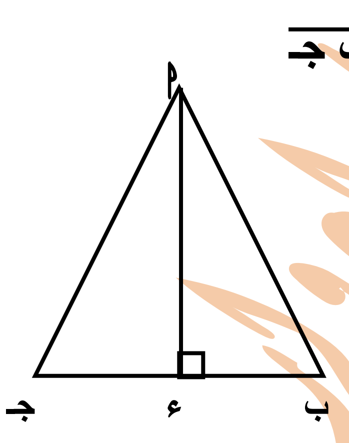


أب = أجـ ⇐ Δ أب جـ متساوى الساقين ، أء ⊥ ب جـ

أء متوسط ب ء = ء جـ = ٣سم

، أء ينصف ∠ ب أجـ

∴ ق(∠ب أ ء) = ق(∠جـ أ ء) = ٢٥°

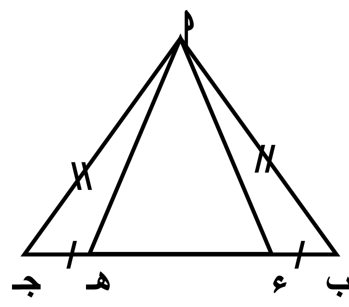


مجموع قياسات زوايا Δ أء جـ = ١٨٠°

∴ ق(∠جـ) = ١٨٠° − [٩٠° + ٢٥°] = ٦٥°

مثـــال : فى الشكل : م ب = م جـ ، ب ء = هـ جـ ، إثبت أن Δ م ء هـ متساوى الساقين

الحــــل



فى Δ Δ م ب ء ، م جـ هـ

فيهما { ب ء = ء جـ ، م ب = م جـ معطى
ق(∠ ب) = ق(∠ جـ) Δ م ب جـ متساوى الساقين }

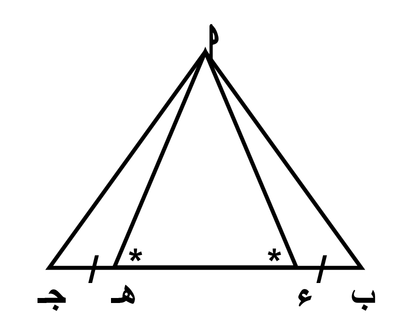
∴ Δ م ب ء ≡ Δ م جـ هـ ومن التطابق ينتج أن

م ء = م هـ ∴ Δ م ء هـ متساوى الساقين

مثـــال : فى الشكل : ب ء = هـ جـ ، ق(∠ م ء هـ) = ق(∠ م هـ ء)

إثبت أن : Δ م ب جـ متساوى الساقين

الحــــل



ق(∠ م ء هـ) = ق(∠ م هـ ء) ∴ م ء = م هـ

ق(∠ م ء ب) = ق(∠ م هـ جـ)

[مكملات الزوايا المتساوية تكون متساوية]

فى : Δ Δ م ب ء ، م هـ جـ

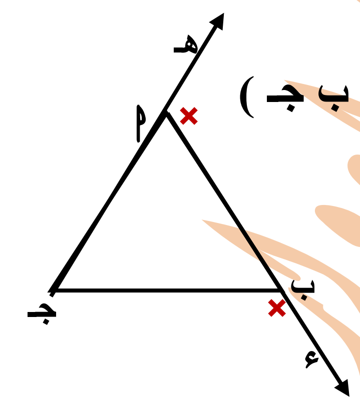
فيهما { م ء = م هـ ، ب ء = هـ جـ
ق(∠ م ء ب) = ق(∠ م هـ جـ) }

∴ Δ م ب ء ≡ Δ م جـ هـ ومن التطابق ينتج أن

م ب = م جـ ∴ Δ م ب جـ متساوى الساقين

مثـــال فى الشكل: ق(∠ هـ م ب) = ق(∠ ء ب جـ) إثبت أن Δ م ب جـ متساوى الساقين

الحــــل



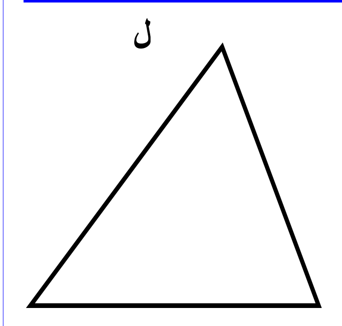
ق(∠ هـ م ب) + ق(∠ ب م جـ) = ق(∠ ء ب جـ) + ق(∠ م ب جـ)

[مكملات الزوايا المتساوية تكون متساوية]

∴ ق(∠ ب م جـ) = ق(∠ م ب جـ)

∴ Δ م ب جـ متساوى الساقين

مثـــال فى الشكل: م ب جـ ء مستطيل ،ب و = جـ هـ إثبت أن: Δ ل و هـ متساوى الساقين



الحــــــل

∆ ∆ أ ب و ، ل جـ ء فيهما أ ب = ء جـ ، ب و = جـ ل

، ق(∠ أ) = ق(∠ ء) = ٩٠

∴ ∆ أ ب و ≡ ∆ ء جـ و ⇐ ق(∠ أ و ب) = ق(∠ جـ ل ء)

ق(∠ أ و ب) = ق(∠ هـ و ل)، ق(∠ جـ ل ء) = ق(∠ هـ ل و)

ق(∠ هـ و ل) = ق(∠ هـ ل و) ∴ هـ و = هـ ل

التباين فى المثلثات

مسلمات التباين بفرض ان: س ، ص ، ع أعداد فان

(١) إذا كان س > ص فان س + ع > ص + ع

(٢) إذا كان س > ص فان س ـ ع > ص - ع

(٣) إذا كان س > ص ، ع (عدد موجب) فان س ع > ص ع

(٤) إذا كان س > ص ، ع (عدد سالب) فان س ع < ص ع

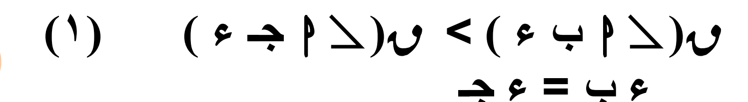
(٥) إذا كان س > ص ، ص > ع فان س > ع

(٦) إذا كان س > ص ، أ > ب فان س + أ > ص + ب

مثـــال : فى الشكل : ق(∠ أ ب ء) > ق(∠ أ جـ ء) ، ء ب = ء جـ

إثبت أن ق(∠ب) > ق(∠ جـ)

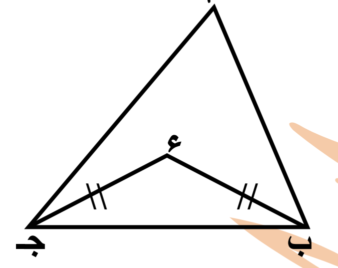
الحــــــل



ق(∠ أ ب ء) > ق(∠ أ جـ ء) (١)

ء ب = ء جـ

ق(∠ ء ب جـ) = ق ق(∠ ء جـ ب) (٢)



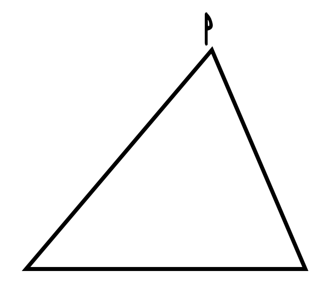
بجمع ١ ، ٢

ق(∠ أ ب ء) + ق(∠ ء ب جـ) > ق(∠ أ جـ ء) + ق(∠ ء جـ ب)

ق(∠ب) > ق(∠ جـ)

مثـــال ق(∠ أ ب جـ) > ق(∠ أ جـ ب) ، ق(∠ ء ب جـ) > ق(∠ ء جـ ب)

إثبت أن ق(∠ب) > ق(∠ جـ)



الحـــــل

ق(∠ م ب جـ) > ق(∠ م جـ ب) (١)

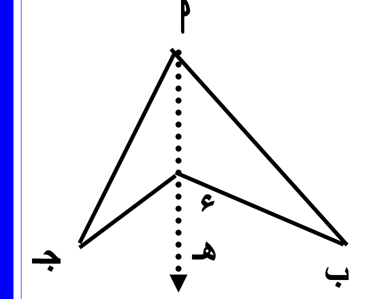
ق(∠ ء ب جـ) > ق ق(∠ ء جـ ب) (٢)

بجمع ١ ، ٢

ق(∠ م ب جـ) + ق(∠ ء ب جـ) > ق(∠ م جـ ب) + ق(∠ ء جـ ب)

ق(∠ ب) > ق(∠ جـ)

مثـــال : فى الشكل: إثبت أن ق(∠ ب ء جـ) > ق(∠ م)



الحـــــل

تذكرأن : قياس أى زاوية خرجة للمثلث أكبر من أى زاوية داخلة عدا المجاورة لها

ق(∠ ب ء هـ) الخارجة > ق(∠ ب م ء) - - - - - (١)

ق(∠ جـ ء هـ) الخارجة > ق(∠ ء م جـ) - - - - - (٢)

بجمع ١، ٢: ق(∠ ب ء هـ) + ق(∠ جـ ء هـ) > ق(∠ ب م ء) + ق(∠ ء م جـ)

ق(∠ ب ء جـ) > ق(∠ م) وهو المطلوب إثباته

المقارنة بين قياسات الزوايا فى مثلث

نظـــــرية (٣)

إذا أختلف طولا ضلعين من مثلث فأكبرهما فى الطول يقابله زاوية أكبر فى القياس من الزاويةالمقابلة للضلع الاخر ٠

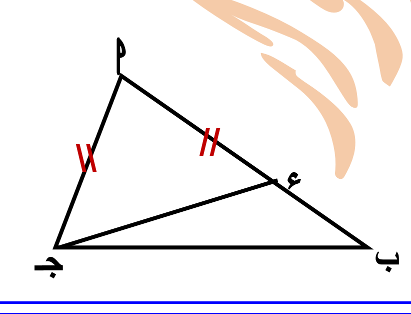
المعطيات : Δ م ب جـ فيه م ب > م جـ

المطلوب : إثبات أن ق(∠ م جـ ب) > ق(∠ م ب جـ)

العمل : نأخذ النقطة ء ∋ م ب بحيث م ء = م جـ

البرهان : فى Δ م جـ ء فيه م ء = م جـ

∴ ق(∠ م جـ ء) = ق(∠ م ء جـ) - - - - (١)



∵ ∠ م ء جـ خارجة عن Δ ب جـ ء

∴ ق(∠ م ء جـ) > ق(∠ ء ب جـ) - - - (٢)

من ١ ، ٢ نستنتج

ق(∠ م جـ ء) > ق(∠ ء ب جـ)

فيكون ق(∠ م جـ ب) > ق(∠ م جـ ء)

∴ ق(∠ م جـ ب) > ق(∠ م ب جـ) وهو المطلوب

مثـــال فى الشكل: م جـ > م ب ، ب ء = ء جـ إثبت أن ق(∠ م ب ء) > ق(∠ م جـ ء)

الحــــل

فى Δ م ب جـ ∵ م جـ > م ب

∴ ق(∠ م ب جـ) > ق(∠ م جـ ب) - - - - (١)

فى Δ ء ب جـ ∵ ء جـ = ء ب

∴ ق(∠ ء ب جـ) = ق(∠ ء جـ ب) - - - (٢)

بطرح (٢-١) ق(∠ م ب جـ) - ق(∠ ء ب جـ) > ق(∠ م جـ ب) - ق(∠ ء جـ ب)

∴ ق(∠ م ب ء) > ق(∠ م جـ ء)

مثـــال فى الشكل: م ب = م ء ، ب جـ > ء جـ إثبت أن : ق(∠ م ء جـ) > ق(∠ م ب جـ)

الحــــل

فى Δ م ب ء ∵ م ء = م ب

∴ ق(∠ م ب ء) = ق(∠ م ء ب) - - - - (١)

فى Δ ب جـ ء ∵ ب جـ > ء جـ

∴ ق(∠ ب ء جـ) = ق(∠ ء ب جـ) - - - (٢)

بجمع (٢+١) ق(∠ م ب جـ) + ق(∠ ء ب جـ) > ق(∠ م جـ ب)+ق(∠ ء جـ ب)

∴ ق(∠ م ب ء) > ق(∠ م جـ ء)

مثـــال فى الشكل: م ب = م جـ ، ء ∈ ب جـ برهن أن : ق(∠ م ء ب) > ق(∠ب)

الحـــــــل

فى Δ أ ب جـ ∵ أ ب = أ جـ

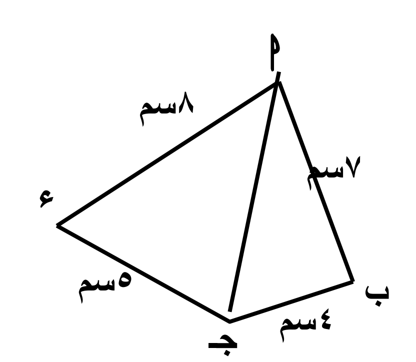
∴ ق(∠ب) = ق(∠جـ) - - - - (١)

ق(∠أ ء ب) > ق(∠جـ) [خارجة عن Δ أ ء جـ]

من ١ ، ٢ ينتج أن

∴ ق(∠أ ء ب) > ق(∠ب) [وهو المطلوب إثباته]

مثـــال: فى الشكل المقابل برهن ان ق(∠ب جـ ء) > ق(∠ب أ ء)



الحـــــــل

فى Δ أ ب جـ ∵ أ ب > ب جـ

∴ ق(∠أ جـ ب) > ق(∠ب أ جـ) - - - - (١)

فى Δ أ جـ ء ∵ أ ء > جـ ء

∴ ق(∠أ جـ ء) > ق(∠ء أ جـ) - - - (٢)

بجمع ١ ، ٢ ق(∠أ جـ ب) + ق(∠أ جـ ء) > ق(∠ب أ جـ) + ق(∠ء أ جـ)

∴ ق(∠ب جـ ء) > ق(∠ب أ ء)

مثـــال : فى الشكل المقابل أ جـ > أب ، ء ، هـ منتصفا $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$

برهن أن ق(∠أ ء هـ) > ق(∠أ هـ ء)

الحـــــــل

فى Δأ ب جـ أ جـ > أ ب ∴ ق(∠ب) > ق(∠جـ) - - - (١)

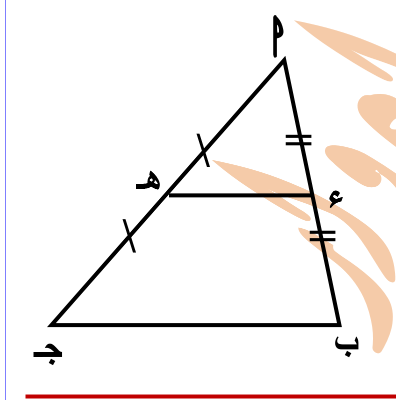
ء منتصف $\overline{أب}$ ، هـ منتصف $\overline{أجـ}$ ∴ $\overline{ء هـ}$ // $\overline{ب جـ}$

∴ ق(∠أ ء هـ) = ق(∠ب) - - - (٢)

∴ ق(∠أ هـ ء) = ق(∠جـ) - - - (٣)

من ١ ، ٢ ، ٣ ينتج أن

∴ ق(∠أ ء هـ) > ق(∠أ هـ ء)



مثـــال فى الشكل: أب > أ جـ ، $\overleftarrow{\text{ب ء}}$ ينصف ∠ أب جـ ، $\overleftarrow{\text{جـ ء}}$ ينصف ∠ أجـ ء

إثبت أن ء ب > ء جـ

الحـــــل

أب > أجـ ∴ ق(∠جـ) > ق(∠ب) - - (١)

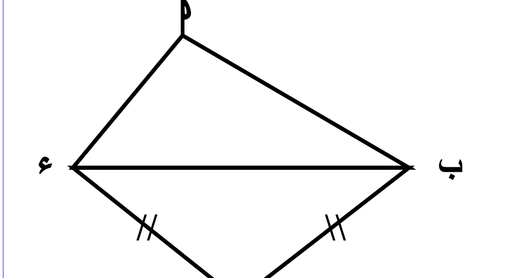
$\overleftarrow{\text{ب ء}}$ ينصف ∠ أب جـ ∴ ق(∠ ء ب جـ) = $\frac{1}{2}$ ق(∠ب) - - (٢)

$\overleftarrow{\text{جـ ء}}$ ينصف ∠ أ جـ ء ∴ ق(∠ ء جـ ب) = $\frac{1}{2}$ ق(∠جـ) - - (٣)

ينتج أن ق(∠ ء ب جـ) > ق(∠ ء ب جـ) ∴ ء ب > ء جـ

مثـــال فى الشكل: أب > أء ، ب جـ = جـ ء إثبت أن ق(∠ أ ء جـ) > ق(∠ أ ب جـ)

الحـــــل



فى Δ أ ب ء ∵ أ ب > أ ء

∴ ق(∠ أ ء ب) > ق(∠ أ ب ء) - - - - (١)

فى Δ ب جـ ء ∵ جـ ب = جـ ء

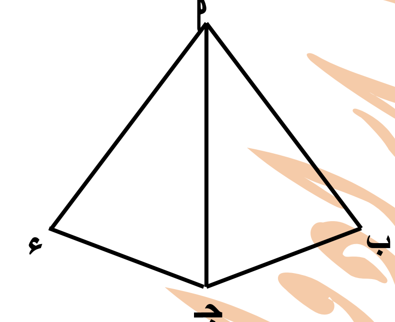
∴ ق(∠جـ ء ب) = ق(∠جـ ب ء) - - - (٢)

بالجمع ق(∠ أ ء ب) + ق(∠جـ ء ب) > ق(∠ أ ب ء) + ق(∠جـ ب ء)

∴ ق(∠ أ ء جـ) > ق(∠ أ ب جـ)

مثـــال فى الشكل: أب > ب جـ ، أء > ء جـ أثبت أن ق(∠ب جـ ء) > ق(∠ب أ ء)

الحـــــل





فى Δ أ ب جـ ∵ أ ب > ب جـ

∴ ق(∠ أ جـ ب) > ق(∠ب أ جـ) - - - - (١)

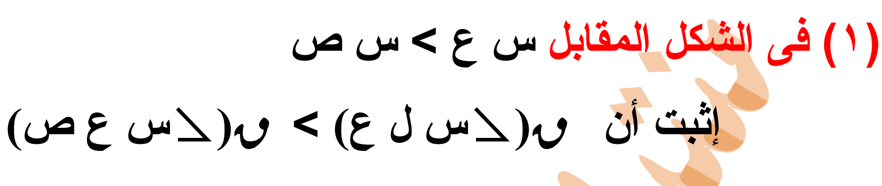
فى Δ أ جـ ء ∵ أ ء > جـ ء

∴ ق(∠ أ جـ ء) = ق(∠جـ أ ء) - - - (٢)

بالجمع ق(∠ أ جـ ب) + ق(∠ أ جـ ء) > ق(∠ب أ جـ) + ق(∠جـ أ ء)

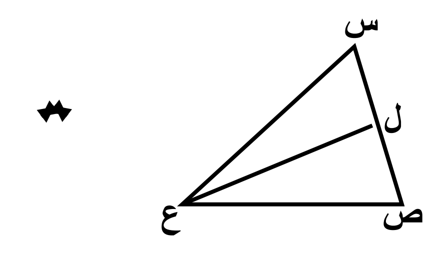
∴ ق(∠ب جـ ء) > ق(∠ب أ ء)

تمارين



(١) فى الشكل المقابل س ع > س ص

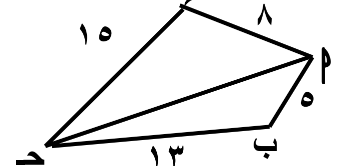
إثبت أن ق(∠س ل ع) > ق(∠س ع ص)





(٢) فى الشكل المقابل

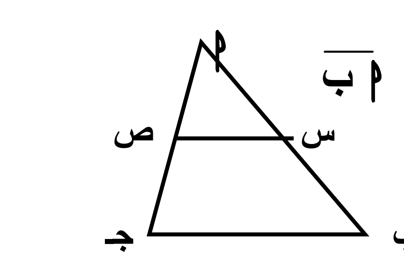
إثبت أن : ق(∠ب أ ء) > ق(∠ب جـ ء)



(٣) فى الشكل المقابل أ ب > أ جـ ، س منتصف أ ب

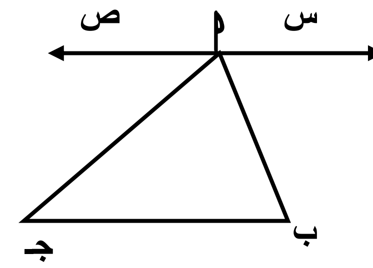
ص منتصف أ جـ إثبت أن

ق(∠أ ص س) > ق(∠أ س ص)



(٤) فى الشكل المقابل: أ جـ > أ ب ، س ص // ب جـ

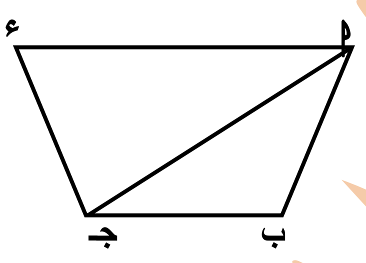
إثبت أن ق(∠س أ ب) > ق(∠ص أ جـ)



(٥) فى الشكل المقابل أ ب جـ ء شكل رباعى

أ ب = ب جـ ، أ ء > أ جـ

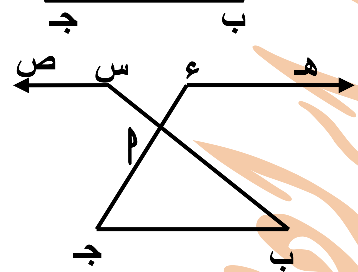
برهن أن : ق(∠جـ) > ق(∠أ)



(٦) فى الشكل المقابل ء هـ // ب جـ // س ص

أ ب > أ جـ . إثبت أن

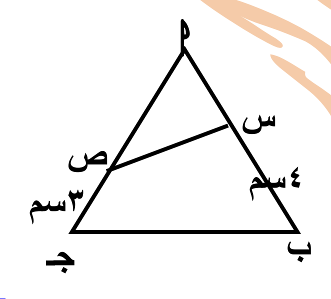
ق(∠هـ ء جـ) > ق(∠ب س ص)

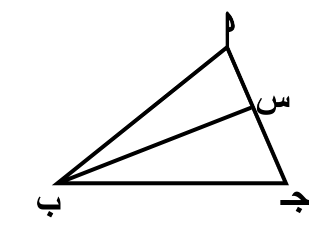


(٧) فى الشكل: أ ب = أ جـ ، ب س = ٤سم ، جـ ص = ٣سم

إثبت أن (١) ق(∠أ س ص) > ق(∠أ ص س)

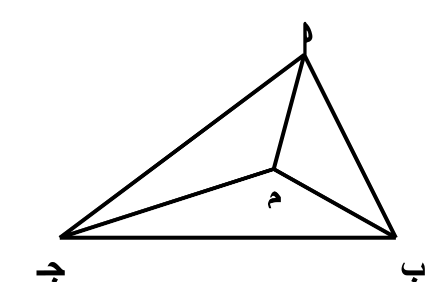
(٢) ق(∠ب س ص) > ق(∠س ص جـ)





(٨) فى الشكل المقابل : م ب < م جـ

إثبت أن ق(∠ م س ب) > ق(∠ م ب جـ)



(١٠) فى الشكل المقابل: م جـ < م ب < م م

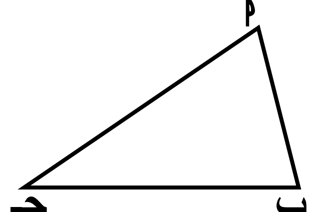
إثبت أن

ق(∠ م) > ق(∠ م جـ م) + ق(∠ م ب م)

المقارنة بين أطوال الأضلاع فى مثلث

نظـــرية (٤) بالبرهان (صـ ٩٨)

إذا أختلف قياسا زاويتين من مثلث فأكبرهما فى القياس يقابلها ضلع أكبر فى الطول من الضلع المقابل للزاوية الاخرى



المعطيات : Δ م ب جـ فيه ق(∠ ب) > ق(∠جـ)

المطلوب : إثبات أن : م جـ > م ب

البرهان : البرهان (صـ ٩٨)

مثـــال فى الشكل : م ب > م جـ ، ب ء ينصف ∠ م ب جـ ، جـ ء ينصف ∠ م جـ ء

إثبت أن : ء ب > ء جـ

الحــــل

Δ م ب جـ فيه م ب > م جـ ∴ ق(∠جـ) > ق(∠ب) - - - (١)

ب ء ينصف ∠ م ب جـ ∴ق(∠ء ب جـ) = $\frac{1}{2}$ ق(ب) - - - (٢)

جـ ء ينصف ∠م جـ ء ∴ق(∠ء جـ ب) = $\frac{1}{2}$ ق(∠جـ) - - (٣)

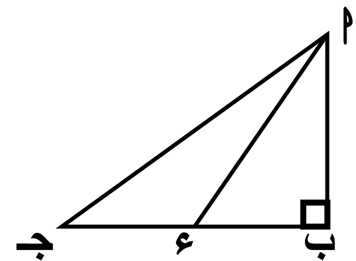
من ١ ، ٢ ، ٣ ينتج أن

∴ ق(∠ء جـ ب) > ق(∠ء ب جـ) ∴ ء ب > ء جـ

نتيجة (١) فى المثلث القائم الزوية يكون الوتر هو أطول أضلاع المثلث

Δ م ب جـ قائم الزاوية فى ب ∴ ق(∠ب) > أى زاوية فى المثلث

مثـــال فى الشكل : Δ م ب جـ قائم الزاوية فى ب ، ء ∈ ب جـ إثبت أن: م جـ > م ء



الحـــل

فى Δ م ب جـ قائم الزاوية فى ب

∴ ق(∠ب) > ق(∠جـ) - - - (١)

ق(∠ م ء جـ) > ق(∠ب) [خارجة عن Δ م ب ء] - - - (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن ∴ ق(∠ م ء جـ) > ق(∠جـ)

فى Δ م ء جـ ∴ م جـ > م ء ﻫ . ط . ث

مثـــال فى الشكل: م ب // ء و ، م جـ // ﻫ و ، إذا كان م جـ > م ب برهن أن: و ﻫ > ء و

الحـــل

فى Δ م ب جـ

م جـ > م ب ∴ ق(∠ب) > ق(∠جـ) - - - (١)

م ب // ء و ∴ ق(∠و ء ﻫ) = ق(∠ب) - - - (٢)

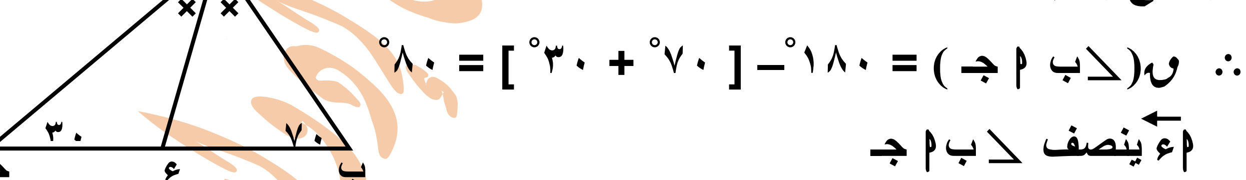
م جـ // و ﻫ ∴ ق(∠و ﻫ ء) = ق(∠جـ) - - (٣)

من ١ ، ٢ ، ٣ ينتج أن:

ق(∠و ء ﻫ) > ق(∠ و ﻫ ء) ∴ و ﻫ > و ء

مثـــال فى الشكل : م ء ينصف ∠ ب م جـ ، ق(∠ب) = ٧٠° ، ق(∠جـ) = ٣٠°
إثبت أن: م ء > ء ب

الحـــل



مجموع زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∴ ق(∠ب م جـ) = ١٨٠° – [٧٠° + ٣٠°] = ٨٠°

م ء ينصف ∠ ب م جـ

∴ ق(∠ب م ء) = ق(∠ء م جـ) = $\frac{٨٠°}{٢}$ = ٤٠°

Δ م ب ء فيه ق(∠ب) > ق(∠ب أ ء) ∴ م ء > ء ب

مثـــال : فى الشكل : أذا كان: $\overleftarrow{\text{ﻫ}ﻣ}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ إثبت أن م جـ > م ب

الحـــل

$\overleftarrow{\text{ﻫ}ﻣ}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ ق(∠ب) = ق(∠ ء م هـ) = ٧٠° [بالتناظر]

، ق(∠جـ) = ق(∠ هـ م جـ) = ٣٠° [بالتبادل]

∆ م ب جـ فيه ق(∠ب) > ق(∠جـ) ∴ م جـ > م ب

نتيجة (٢) طول القطعة المستقيمة العمودية المرسومة من نقطة نقطة خارجة عن مستقيم معلوم إلى المستقيم أصغر من أى قطعة مستقيمة موسومة من هذة النقطة ألى المستقيم المعلوم

مثـــال فى الشكل : أ ب > أ جـ ، $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{س م}}$ ينصف ∠ م س ص $\overleftarrow{\text{ص م}}$ ينصف ∠ م ص س برهن أن م س > م ص

الحـــــل

∆ م ب جـ فيه م ب > م جـ ∴ ق(∠جـ) > ق(∠ب) - - - (١)

$\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ∴ ق(∠ م س ص) = ق(∠ب) - - - (٢)

، ق(∠ م ص س) = ق(∠جـ) - - - (٣)

من ١، ٢، ٣ ينتج أن

ق(∠ م ص س) > ق(∠ م س ص) - - - (٤)

$\overleftarrow{\text{س م}}$ ينصف ∠ م س ص ∴ ق(∠م س ص) = $\frac{1}{2}$ ق(∠ م س ص) - - (٥)

$\overleftarrow{\text{ص م}}$ ينصف م ص س ∴ ق(∠م ص س)= $\frac{1}{2}$ ق(∠ م ص س) - - (٦)

من ٤ ، ٥ ، ٦ ∴ق(∠ م ص س) > ق(∠ م س ص) ∴ م س > م ص

مثـــال فى الشكل : $\overline{\text{م ء}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، ق(∠ب م جـ) =٨٠°، ق(∠ ء م جـ) = ٤٠°

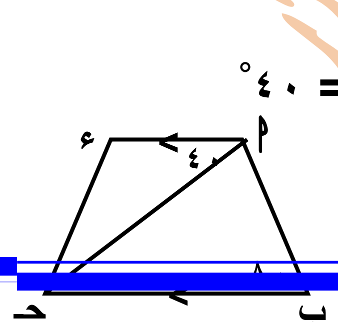
إثبت أن : ب جـ > م جـ

الحـــــل

$\overline{\text{م ء}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ∴ق(∠ م جـ ب) = ∴ق(∠ ء م جـ) = ٤٠°

∆ م ب جـ فيه

مجموع زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°



∴ ق(∠ب أ جـ) = ١٨٠° − [٨٠° + ٤٠°] = ٦٠°

∴ ق(∠أ ب جـ) > ق(∠ب أ جـ) ∴ أجـ > ب جـ

مثـــال فى الشكل : إذا كان أ جـ > أب إثبت أن أجـ > أء

الحـــل

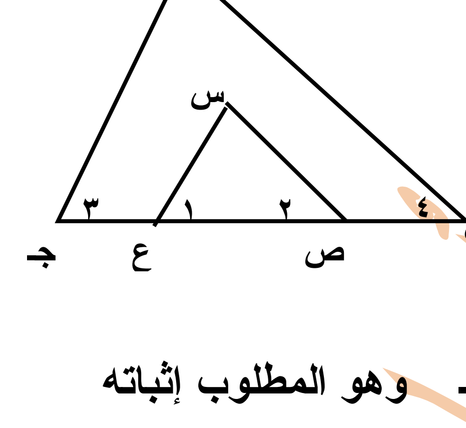
Δ أب جـ فيه أجـ > أب ∴ ق(∠ب) > ق(∠جـ) - - (١)

ق(∠أ ء جـ) > ق(∠ب) [خارجة عن Δ أب ء] - (٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن ق(∠أ ء جـ) > ق(∠جـ) ∴ أجـ > أء

مثـــال فى الشكل : س ص > س ع ، أب // س ص ، أجـ // س ع ،
س ص > س ع إثبت أن: أب > أ جـ

الحـــل



Δ س ص ع فيه س ص > س ع ∴ ق(∠١) > ق(∠٢)- - (١)

أب // س ص ، ب جـ قاطع لهما

∴ ق(∠٢) = ق(∠٤) [بالتناظر] - - (٢)

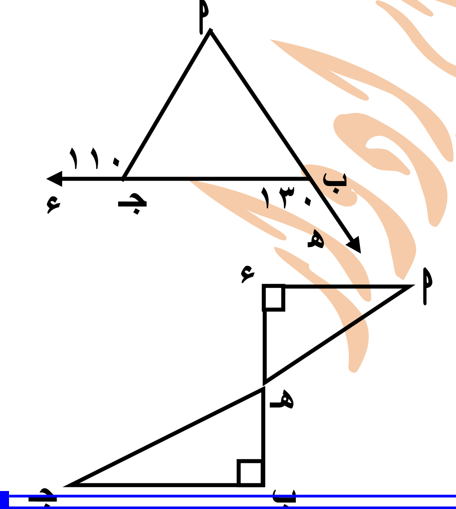
أجـ // س ع ، ب جـ قاطع لهما

∴ ق(∠١) = ق(∠٣) [بالتناظر] - - (٣)

من ١ ، ٢ ، ٣ ينتج أن

∴ ق(∠٣) > ق(∠٤) ∴ أب > أجـ وهو المطلوب إثباته

تمارين



(١) فى الشكل المقابل

ق(∠هـ ب جـ) = ١١٠° ، ق(∠أ جـ ء) = ١٣٠°

رتب أضلاع المثلث تصاعديا تبعا لاطوالها

(٢) فى الشكل المقابل

ق(∠أ ء ب) = ق(∠ء ب جـ) = ٩٠°

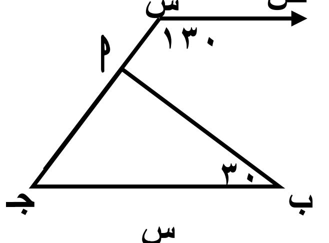
إثبت أن : أجـ > ب ء



(٣) فى الشكل المقابل س ص // ب جـ

ق(∠ب أس) = ٧٠° ، ق(∠جـ أ ص) = ٥٧°

إثبت أن أ جـ > أ ب

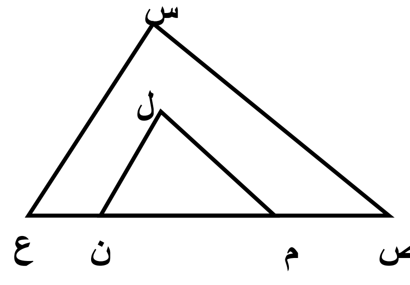




(٤) فى الشكل المقابل س ص // ب جـ

ق(∠ص س جـ) = ١٣٠° ، ق(∠ أ ب جـ) = ٣٠°

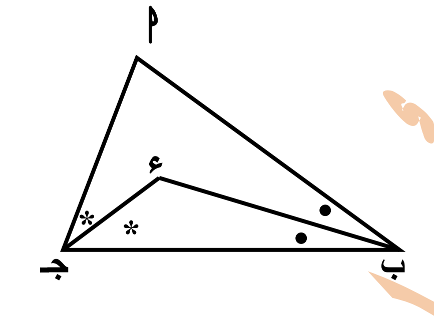
إثبت أن: جـ ب > أب



(٥) فى الشكل المقابل

س ص > س ع ، ل م // س ص

، ل ن // س ع إثبت أن : ل م > ل ن



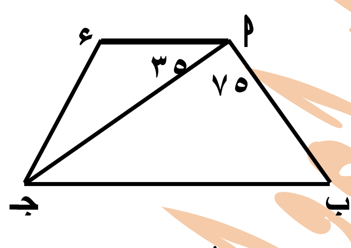
(٦) أب جـ ء شكل رباعى فيه أء = جـ ء ، ق(∠ ء) = ٥٠° ،

ق(∠ أ) =١١٠° ، ق(∠ ب) = ٨٠° إثبت أن أ ب > ب جـ

(٧) فى الشكل المقابل

أ ب > أ جـ ، جـ ء ينصف ∠ أ جـ ب

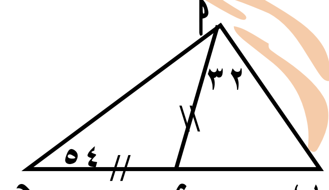
ب ء ينصف ∠ أ ب جـ إثبت أن ب ء > جـ ء



(٨) فى الشكل المقابل

أء // ب جـ ، ق(∠ ء أ جـ) = ٣٥°

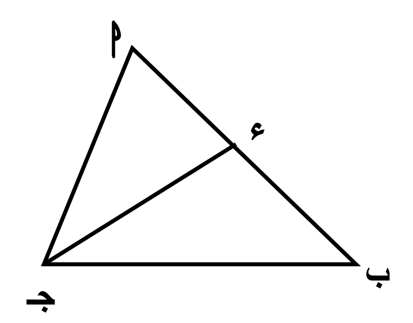
ق(∠ب أ جـ) = ٧٥° إثبت أن : أجـ > أب



(٩) فى الشكل المقابل

أء = ء جـ ، ق(∠ب أ ء) = ٣٢°

، ق(∠جـ) = ٥٤° إثبت أن : ء جـ > ء ب



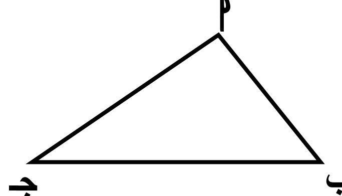
(١٠) فى الشكل المقابل

جـ ء ينصف ∠ ب جـ م ، ق(∠ب) =٤٠

ق(∠م) = ٦٠ إثبت أن ب ء > ء م

متباينة المثلث

- حقيقة: فى أى مثلث مجموع طولى أى ضلعين فى المثلث أكبر من طول الضلع الثالث
- طول أى ضلع فى مثلث أصغر من مجموع طولى الضلعين الاخرين وأكبر من الفرق بينهما



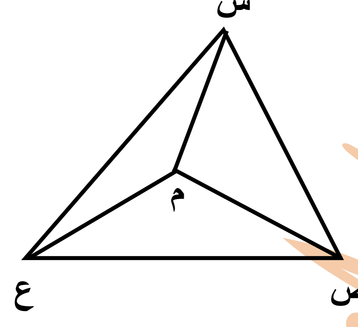
أى أن فى أى Δ م ب جـ م ب + م جـ > ب جـ

م ب + ب جـ > م جـ ، م جـ + ب جـ > م ب

مثـــال : فى الشكل المقابل إذا كان محيط س ص ع = ٥٠سم

إثبت أن : س م + ص م + ع م > ٢٥

الحـــــل



Δ س م ص فيه س م + م ص > س ص

Δ ص م ع فيه ص م + م ع > ص ع

Δ س م ع فيه س م + م ع > س ع بالجمع

س م+م ص + ص م + م ع + س م + م ع > س ص +ص ع + س ع

٢ س م + ٢ م ص + ٢ م ع > ٥٠ بقسمة الطرفين هلى ٢

س م + م ص + م ع > ٢٥

مثـــال : بين أيا من الاطوال الاتية تصلح أن تكون أضلاع مثلث

(أ) ٢ ، ٥ ، ٣ (ب) ٣ ، ٧ ، ٥ (جـ) ٧ ، ٣ ، ٢

الحـــــل

(أ) مجموع ٢+٣ = ٥ وليس أكبر من ٥

الاطوال ٢، ٥، ٣ لا تصلح أن تكون أضلاع مثلث

(ب) الاطوال ٣ ، ٧ ، ٥ تصلح أن تكون أضلاع مثلث لان مجموع أى ضلعين أكبر من طول الضلع الثالث

(جـ) الاطوال ٧ ، ٣ ، ٢ لا تصلح أن تكون أضلاع مثلث لان ٣+٢ = ٥ وهو أصغر من الضلع الثالث وليس أكبر

تدريب : أختر الاجابة الصحيحة مما بين القوسين

(١) الاطوال ٢ ، ٦ ، ٤ [تصلح – لا تصلح] لان تكون أضلاع مثلث

(٢) الاطوال ٢ ، ٥ ، ٤ [تصلح – لا تصلح] لان تكون أضلاع مثلث

(٣) الاطوال ٣ ، ٦ ، ٢ [تصلح – لا تصلح] لان تكون أضلاع مثلث

(٤) الاطوال ٢ ، ٦ ، ٥ [تصلح – لا تصلح] لان تكون أضلاع مثلث

(٥) الاطوال ٢ ، ٧ ، ٤ [تصلح – لا تصلح] لان تكون أضلاع مثلث

(٦) الاطوال ٢ ، ٦ ، ٨ [تصلح – لا تصلح] لان تكون أضلاع مثلث

(٧) الاطوال ٥ ، ٦ ، ٤ [تصلح – لا تصلح] لان تكون أضلاع مثلث

(٨) الاطوال ٢ ، ٢ ، ٤ [تصلح – لا تصلح] لان تكون أضلاع مثلث

تدريب : أختر الاجابة الصحيحة مما بين القوسين

١-مجموع طولى أى ضلعين من مثلث .... طول الضلع الثالث

[أصغر من – أكبر من – يساوى – نصف]

٢- طول أى ضلع فى مثلث .... مجموع الضلعين الاخرين

[> أو < أو = أو ضعف]

٣- أى من الاضلاع الاتية لا تصلح لان تكون أضلاع مثلث
[٧ ، ٧ ، ٥ أو ٩ ، ٩ ، ٩ أو ٣ ، ٦ ، ١٢ أو ٣ ، ٤ ، ٥]

٤- إذا كان طولا ضلعين ٧ ، ٤ فإن طول الضلع الثالث يمكن أن يكون
[١ سم ، ٢ سم ، ٣ سم ، ٤ سم]

٥- إذا كان طولا ضلعين فى مثلث متساوى الساقين ٣سم ، ٧سم فإن طول الضلع الثالث يساوى .... [٧ سم أو ٣ سم ، ٤ سم ، ١٠ سم]

٦- مثلث له محور تماثل واحد ، طولا ضلعين فيه ٤ سم ، ٨ سم فإن محيطه = ...
[١٦ سم أو ٢٠ سم ، ٢٤ سم أو ٣٠ سم]